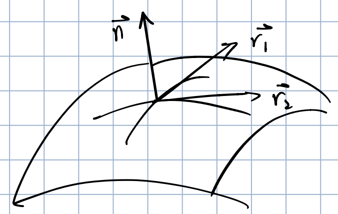
曲面上标架 $\{\vec{r}(u,v);\ \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{n}\}$ 分别求偏导



$\vec{r}_{ij}$ 及 $\vec{n}_i$ 可用 $\{\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{n}\}$ 线性表示

设 $\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\ \vec{r}_k + b_{ij}\vec{n}$,

$\parallel$ Einstein 求和约定

$\Gamma_{ij}^{1}\vec{r_1} + \Gamma_{ij}^{2}\vec{r_2}$

设 $\vec{n}_i = \lambda_i^k \vec{r}_k \ (= \lambda_i^1 \vec{r_1} + \lambda_i^2 \vec{r_2})$

Qn: 系数 Γ_{ij}^k, λ_i^k 是什么?

--- $\vec{r}_{ij}$ ---

两边与 $\vec{n}$ 作内积

$\vec{r}_{11}\cdot\vec{n} = b_{11} \Rightarrow b_{11} = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uu} = L$

$\vec{r}_{12}\cdot\vec{n} = b_{12} = M = b_{21}$

$\vec{r}_{22}\cdot\vec{n} = b_{22} = N$

即 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

Recall: $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$

两边与 $\vec{r}_k$ 作内积 ($k=1,2$), 为此, 我们将求和指标换个字母:

$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\ell}\vec{r}_\ell + b_{ij}\vec{n}$

$\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_k = (\Gamma_{ij}^{\ell}\vec{r}_\ell + b_{ij}\vec{n})\cdot\vec{r}_k$

$= (\Gamma_{ij}^{1}\vec{r_1} + \Gamma_{ij}^{2}\vec{r_2})\cdot\vec{r}_k = \Gamma_{ij}^{1}\vec{r_1}\cdot\vec{r}_k + \Gamma_{ij}^{2}\vec{r_2}\cdot\vec{r}_k$

$= \Gamma_{ij}^{\ell}(\vec{r}_\ell\cdot\vec{r}_k) = g_{k\ell}\Gamma_{ij}^{\ell}$

同时, $(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_k)_j = \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_k + \vec{r}_i\cdot\vec{r}_{kj}$

$\Rightarrow \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_k = (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_k)_j - \vec{r}_i\cdot\vec{r}_{kj}$

$= \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \vec{r}_i\cdot\left(\Gamma_{kj}^{s}\vec{r}_s + b_{kj}\vec{n}\right)$

$= \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - g_{is}\Gamma_{kj}^{s}$

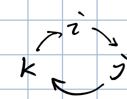
得 $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - g_{is}\Gamma^s_{kj} = g_{kl}\Gamma^l_{ij}$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = g_{is}\Gamma^s_{kj} + g_{kl}\Gamma^l_{ij}$$

引入记号 $g_{is}\Gamma^s_{kj} = [kj, i]$,

则 $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = [kj, i] + [ij, k]$ ①

由 $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{ji}$ 知 $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ ，轮换指标，



$i \to j$
$k \to i$
$j \to k$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} = [ik, j] + [jk, i] \quad ②$$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} = [ji, k] + [ki, j] \quad ③$$

由 $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$ 有 $[ij, k] = [ji, k]$

$\Rightarrow$ ①+③−② :

$$2[ij, k] = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$$ 为第一类克氏记号

$$[ij, k] = g_{kl}\Gamma^l_{ij}$$
$$= g_{k1}\Gamma^1_{ij} + g_{k2}\Gamma^2_{ij}$$

Recall $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

两边乘 g^{lk} : $g^{lk}[ij, k] = g^{lk}\left(g_{kl}\Gamma^l_{ij}\right)$

l 遍历 1, 2 :

$$g^{1k}[ij, k] = g^{1k}\left(g_{k1}\Gamma^1_{ij} + g_{k2}\Gamma^2_{ij}\right) = \Gamma^1_{ij}$$
$$g^{2k}[ij, k] = g^{2k}\left(g_{k1}\Gamma^1_{ij} + g_{k2}\Gamma^2_{ij}\right) = \Gamma^2_{ij}$$

合之有 $\Gamma^l_{ij} = g^{lk}[ij, k]$

于是有第一组基本公式（Gauss 公式）

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\,\vec{r}_k + b_{ij}\,\vec{n},$$

其中 $b_{ij} = \vec{r}_{ij}\cdot\vec{n}$ 为第二基本量，

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}[ij,l],\quad [ij,l] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

可以看出，Γ 和 $[ij,k]$ 都是通过 $\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_k$，$\vec{r}_{ij}\cdot\vec{n}$ 算出来的

--- $\vec{n}_i = \lambda_i^k\,\vec{r}_k$ ---

与 $\vec{r}_j$ 作内积：

$$\vec{n}_i\cdot\vec{r}_j = \lambda_i^k(\vec{r}_k\cdot\vec{r}_j)$$

i.e., $-b_{ij} = \lambda_i^k g_{kj}$ $\left(= \lambda_i^1 g_{1j} + \lambda_i^2 g_{2j}\right)$

$$g^{1j}(-b_{ij}) = \lambda_i^1 g^{1j} g_{1j} = \lambda_i^1$$

$$g^{2j}(-b_{ij}) = \lambda_i^2 g^{2j} g_{2j} = \lambda_i^2$$

第二组基本公式（Weingarten 公式）

$\vec{n}_i = -b_i^k\,\vec{r}_k$，其中 $b_i^k = g^{kj} b_{ij}$

$$\left(= -b_i^1\,\vec{r}_1 - b_i^2\,\vec{r}_2\right)$$

曲面论基本方程（表达第一、第二基本量间的关系）

由 $\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{s}\vec{r}_s + b_{ij}\vec{n}$

两边对 u^k 求导，

$$\vec{r}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{s}}{\partial u^k}\vec{r}_s + \Gamma_{ij}^{s}\vec{r}_{sk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}\vec{n} + b_{ij}\vec{n}_k$$

$\Downarrow$ Gauss 公式，Weingarten 公式

$$\vec{r}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^k}\vec{r}_l + \Gamma_{ij}^{s}\left(\Gamma_{sk}^{l}\vec{r}_l + b_{sk}\vec{n}\right) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - b_{ij}b_k^l\vec{r}_l$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^{s}\Gamma_{sk}^{l} - b_{ij}b_k^l\right)\vec{r}_l + \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + b_{sk}\Gamma_{ij}^{s}\right)\vec{n}$$

$\Downarrow$ 交换 j、k： $j \rightleftarrows k$

$$\vec{r}_{ikj} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^j} + \Gamma_{ik}^{s}\Gamma_{sj}^{l} - b_{ik}b_j^l\right)\vec{r}_l + \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + b_{sj}\Gamma_{ik}^{s}\right)\vec{n}$$

$\Downarrow$ $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$

切向：$\dfrac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^k} - \dfrac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^{s}\Gamma_{sk}^{l} - \Gamma_{ik}^{s}\Gamma_{sj}^{l} = -b_{ik}b_j^l + b_{ij}b_k^l$ （Gauss 方程）

法向：$\dfrac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + b_{sk}\Gamma_{ij}^{s} = \dfrac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + b_{sj}\Gamma_{ik}^{s}$ （Godazzi 方程）

引入一组函数（关于曲面参数 u^1, u^2）如下

（16个） $$R_{ijk}^{l} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^{s}\Gamma_{sj}^{l} - \Gamma_{ij}^{s}\Gamma_{sk}^{l}$$

这16个函数在曲面参数变化之下有特定的变化规律，从而代表一个几何对象，几何学家称之为 Riemann 曲率张量

利用 Riemann 曲率张量，Gauss 方程可写为

$$R_{ikj}^{l} = b_{ij}b_k^l - b_{ik}b_j^l$$

降指标：两边乘 $g_{h\ell}$，记 $R_{hikj} = g_{h\ell} R^{\ell}{}_{ikj}$

$$R_{hikj} = g_{h\ell}\, b_{ij}\, b_k{}^{\ell} - g_{h\ell}\, b_{ik}\, b_j{}^{\ell}$$
$\scriptstyle 1\,2\,3\,4$

$$= b_{ij}\,(b_k{}^{\ell} g_{h\ell}) - b_{ik}\,(b_j{}^{\ell} g_{h\ell})$$

$$= \underset{24}{b_{ij}}\ \underset{13}{b_{hk}} - \underset{23}{b_{ik}}\ \underset{14}{b_{hj}}$$

$(1324)-(1423)$

性质.

(再换一下字母…)

$R_{\ell ijk} = g_{\ell h} R^{h}{}_{ijk}$

(1) $R_{\ell ijk} = -R_{i\ell jk}$

(2) $R_{\ell ijk} = -R_{\ell ikj}$

Pf. $R_{\ell ijk} = b_{\ell j} b_{ik} - b_{\ell k} b_{ij}$

$R_{i\ell jk} = b_{ij} b_{\ell k} - b_{ik} b_{\ell j}$. □

(3) $R_{\ell ijk} + R_{\ell jki} + R_{\ell kij} = 0$

$i \to j \to k \to i$

pf. $(\ell j)(ik) - (\ell k)(ik) + (\ell k)(ji) - (\ell i)(jk) + (\ell i)(kj) - (\ell j)(ki) = 0$. □

Corollaries. $R_{11jk} = -R_{11jk} \Rightarrow R_{11jk} = 0$

$R_{ij11} = 0$, $R_{22jk} = 0$, $R_{ij22} = 0$

16个中真正 nontrivial 的是 $R_{1212} = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}$

$$= LN - M^2$$

Gauss 曲率 $K = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = \dfrac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$ 仅与曲面第一基本形式有关 (Theorema Egregium)