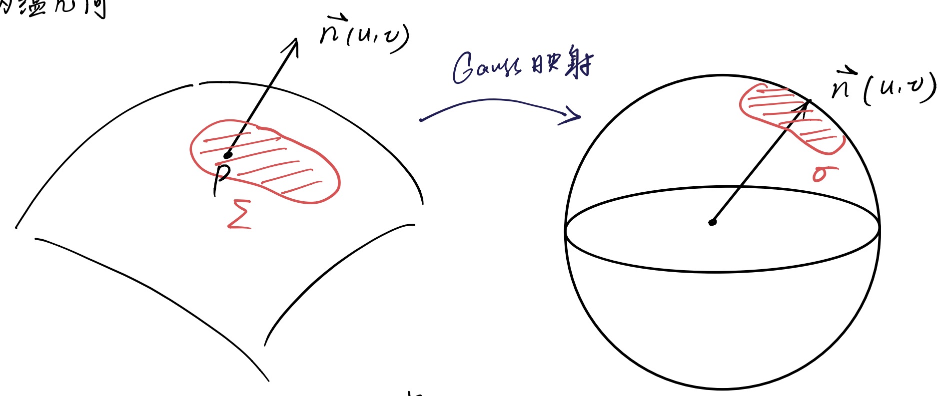
内蕴几何



$$\frac{|\sigma|}{|\Sigma|}$$ ← 球面像 σ 的面积

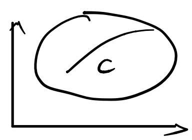
$$\lim_{\Sigma \to p} \frac{|\sigma|}{|\Sigma|} = |K(u,v)|$$

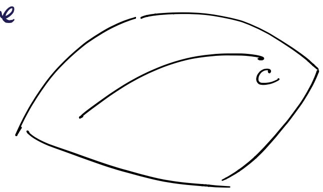
反由 $\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ 蕴含着一系列几何性质

曲面上曲线的测地曲率 geodesic curvature

对 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$，任取 Σ 上一条曲线 C

C: $u = u(s)$
$v = v(s)$





或 $\vec{r}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$ s 为弧长参数.

C 的单位切向量 $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$

C 的主曲率向量

$$\kappa \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}\right)$$

$$= \left(\vec{r}_{uu}\frac{du}{ds} + \vec{r}_{uv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2}$$

$$+ \left(\vec{r}_{vu}\frac{du}{ds} + \vec{r}_{vv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

$$(\kappa\vec{N})\cdot\vec{n} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \kappa_n$$

记 $u = u^1$, $v = v^2$, $\vec{r}_u = \vec{r}_1$, $\vec{r}_v = \vec{r}_2$, $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{12}$, …

有 $\vec{T} = \vec{r}_i \frac{du^i}{ds}$,

$$\kappa\vec{N}=\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\vec{r}_i\frac{du^i}{ds}\right)$$
$$=\vec{r}_{ij}\frac{du^j}{ds}\cdot\frac{du^i}{ds}+\vec{r}_i\frac{d^2u^i}{ds}$$
$$=\left(\Gamma_{ij}^k\vec{r}_k+b_{ij}\vec{n}\right)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}+\vec{r}_i\frac{d^2u^i}{ds^2}$$

即 $\kappa\vec{N}=\left(\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}+\frac{d^2u^i}{ds^2}\right)\vec{r}_i+b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\vec{n}$

由 $\kappa\vec{N}=\dot{\vec{T}}=\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\vec{r}_i+k_i\vec{n}$

知 $\vec{T}\perp\kappa\vec{N}=\dot{\vec{T}}$ 及 $\vec{T}\perp\vec{n}$

$\Rightarrow 0=\vec{T}\cdot(\kappa\vec{N})=(\quad)\cdot\vec{T}+(k_n\vec{n})\vec{T}$

$\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\perp\vec{T}$

定义 $\vec{v}=\vec{n}\times\vec{T}$，则 $\vec{\alpha}\parallel\vec{v}$ 有

$$\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\vec{r}_i=k_g\vec{v}$$

<u>def</u> 称 k_g 为曲线 C 的测地曲率

于是 $\kappa\vec{N}=k_g\vec{v}+k_n\vec{n}$

推论 1. $\kappa^2=k_g^2+k_n^2$ 由此知若曲线 C 为直线，则沿着曲线 C 处处 $k_n=0$，$k_g=0$

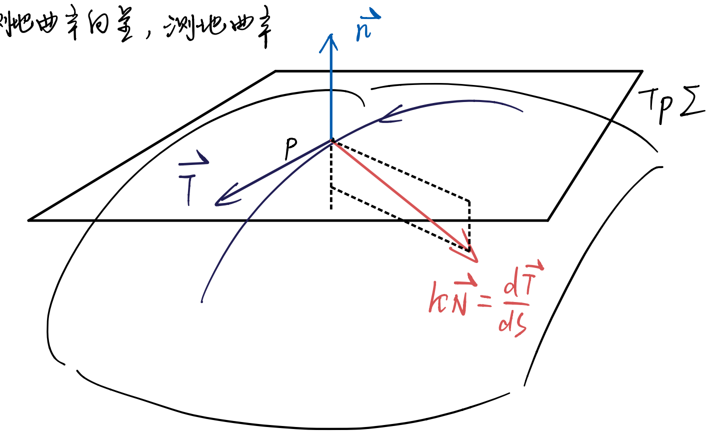
<u>def</u> 对于曲面 Σ 上的曲线 C，若在 C 上每一点处 $k_g=0$，则称 C 为 Σ 上的一条测地线．直观地说，所谓测地线是指从曲面内部看曲线 C 的弯曲程度 $k_g\equiv 0$，这相当于我们生活所在空间中的一条直线（直线弯曲为 0） 地球是圆的

测地线方程

$$C\begin{cases}u=u(s)\\ v=v(s)\end{cases}\quad (s\ 弧长)$$

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0 \quad (沿着\ C\ 恒成立)\ 二阶$$

测地曲率向量，测地曲率



对于曲面 Σ : $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 上过 P 点的曲线 C : $\begin{cases} u = u(s) \\ v = v(s) \end{cases}$ 或 $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$

C 在 P 点单位切向量 $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} = \vec{r}_i \frac{du^i}{ds}$

$$k\vec{N} = \frac{d}{ds}\vec{T} = \frac{d}{ds}\left(\vec{r}_i \frac{du^i}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(\vec{r}_i)\frac{du^i}{ds} + \vec{r}_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$$

$$= \vec{r}_{ij} \frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds} + \vec{r}_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$$

$$= \Gamma^k_{ij} \frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\vec{r}_k + b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\vec{n} + \vec{r}_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$$

即 $k\vec{N} = \left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}(u,v)\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\vec{r}_i + k_n\vec{n}$

$k\vec{N}$ 法向分量为 $k_n\vec{n}$

切向分量为 $\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\vec{r}_i = \vec{v}$

令 $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{T}$ ，则 $\{\vec{T}, \vec{v}, \vec{n}\}$ 构成右手系

则 $\left(\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\vec{r}_i = k_g\vec{v}$

称 k_g 为 C 在 P 处的测地曲率

正交参数下的测地曲率公式

由 $\vec{\nu}=\vec{n}\times\vec{T}$ 及 $\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\vec{r_i}=k_g\vec{\nu}$

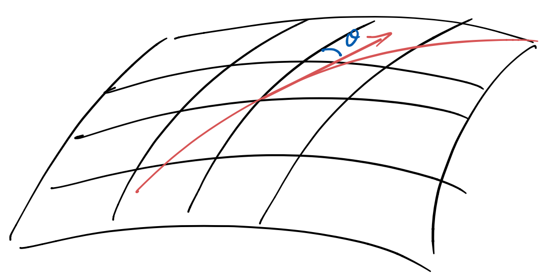
在一般参数下计算 k_g 很难.

为此 Liouville 给出了在正交参数曲线网下计算测地曲率的公式 —— Liouville 公式

叙述如下: 假设 (u,v) 为曲面 Σ 上正交参数网 (处处 $F=0$) 对于 Σ 上曲线 C

$\begin{cases}u=u(s)\\v=v(s)\end{cases}$, 假设 C 的单位切向量 $\vec{T}$ 与 u 线的夹角为 θ, 则沿着 C,

(Liouville 公式) $$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta$$



Pf. 曲线 C: $\begin{cases}u=u(s)\\v=v(s)\end{cases}$ s 弧长参数

(u,v) 为正交参数网

可取 $\vec{e_1}=\frac{\vec{r_u}}{\sqrt{E}}$, $\vec{e_2}=\frac{\vec{r_v}}{\sqrt{G}}$, $\vec{e_3}=\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{n}$

C 的单位切向量 $\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r_u}\frac{du}{ds}+\vec{r_v}\frac{dv}{ds}=\vec{e_1}\sqrt{E}\frac{du}{ds}+\vec{e_2}\sqrt{G}\frac{dv}{ds}$

设 $\vec{T}=\vec{e_1}\cos\theta+\vec{e_2}\sin\theta$ 则 $\sqrt{E}\frac{du}{ds}=\cos\theta$, $\sqrt{G}\frac{dv}{ds}=\sin\theta$

$$\vec{\nu}=\vec{n}\times\vec{T}=\vec{e_3}\times(\vec{e_1}\cos\theta+\vec{e_2}\sin\theta)$$
$$=\vec{e_2}\cos\theta-\vec{e_1}\sin\theta$$

$k_g=\frac{d\vec{T}}{ds}\vec{\nu}$ $\qquad$ $\kappa\vec{N}=\frac{d\vec{T}}{ds}=k_g\vec{\nu}+k_n\vec{n}$

$$=\frac{d}{ds}\left(\vec{e_1}\cos\theta+\vec{e_2}\sin\theta\right)\vec{\nu}$$

$$=\left[\dot{\vec{e_1}}\cos\theta-(\vec{e_1}\sin\theta)\frac{d\theta}{ds}+\dot{\vec{e_2}}\sin\theta+(\vec{e_2}\cos\theta)\frac{d\theta}{ds}\right]\cdot\vec{v}$$

$$=(\dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{v})\cos\theta+(\dot{\vec{e_2}}\cdot\vec{v})\sin\theta+\frac{d\theta}{ds}$$

$$=(\dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{e_2})\cos^2\theta-(\dot{\vec{e_2}}\cdot\vec{e_1})\sin^2\theta+\frac{d\theta}{ds}$$

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}+\dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{e_2}$$

2020/12/24

Liouville 公式

设 (u,v) 为曲面 Σ 上正交参数网，对于 Σ 上任一条曲线 C $\begin{cases} u=u(s) \\ v=v(s) \end{cases}$ （s 弧长参数）

令 $\theta=\theta(s)$ 为 C 与 u 线的夹角（即 C 的单位切向量与 $\vec{r_u}$ 构成的角），则 C 的测地曲率 k_g 为 $k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta$

（图看上面）

Pf. 取 $\vec{e_1}=\frac{\vec{r_u}}{|\vec{r_u}|}=\frac{\vec{r_u}}{\sqrt{E}}$，$\vec{e_2}=\frac{\vec{r_v}}{|\vec{r_v}|}=\frac{\vec{r_v}}{\sqrt{G}}$，$\vec{e_3}=\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{n}$

对于曲线 C: $\begin{cases} u=u(s) \\ v=v(s) \end{cases}$ 有 $\vec{r}(s)=\vec{r}(u(s),v(s))$ =>

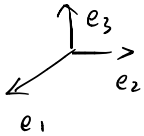
$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r_u}\frac{du}{ds}+\vec{r_v}\frac{dv}{ds}$$

即 $\vec{T}=\vec{e_1}\left(\sqrt{E}\frac{du}{ds}\right)+\vec{e_2}\left(\sqrt{G}\frac{dv}{ds}\right)$ (1)

设 $\vec{T}=\vec{e_1}\cos\theta+\vec{e_2}\sin\theta$ (2)

由 (1)(2) $\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta$，$\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta$ (3)

$$\vec{v}=\vec{n}\times\vec{T}=\vec{e_3}\times(\vec{e_1}\cos\theta+\vec{e_2}\sin\theta)$$



$$= \vec{e_2}\cos\theta - \vec{e_1}\sin\theta$$

$$k\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\vec{e_1}\cos\theta + \vec{e_2}\sin\theta\right) = \dot{\vec{e_1}}\cos\theta - \vec{e_1}\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$$
$$+\dot{\vec{e_2}}\sin\theta + \vec{e_2}\cos\theta\frac{d\theta}{ds}$$

$$k_g = (k\vec{N})\cdot\vec{V} = \frac{d\theta}{ds} + (\dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{V})\cos\theta + (\dot{\vec{e_2}}\cdot\vec{V})\sin\theta$$
$$= \frac{d\theta}{ds} + (\dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{e_2})\cos^2\theta - (\vec{e_1}\cdot\dot{\vec{e_2}})\sin^2\theta$$

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} \equiv 0 \Rightarrow \dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{e_2} + \vec{e_1}\cdot\dot{\vec{e_2}} = 0$$

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + \dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{e_2} \qquad (4)$$

注意到 $\vec{e_1} = \dfrac{\vec{r_u}}{\sqrt{E}}$, $\vec{e_2} = \dfrac{\vec{r_v}}{\sqrt{G}}$

$$\dot{\vec{e_1}}\cdot\vec{e_2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{r_u}}{\sqrt{E}}\right)\cdot\frac{\vec{r_v}}{\sqrt{G}}$$

$$\cancel{= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\frac{du}{ds} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\frac{dv}{ds}}$$ (正交,消去)

$$= \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\vec{r_u} + \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\vec{r_{uu}}\frac{du}{ds} + \vec{r_{uv}}\frac{dv}{ds}\right)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\vec{r_v}$$

$$= \frac{\vec{r_{uu}}\cdot\vec{r_v}}{\sqrt{EG}}\frac{du}{ds} + \frac{\vec{r_{uv}}\cdot\vec{r_v}}{\sqrt{EG}}\frac{dv}{ds}$$

$$\vec{r_{uu}}\cdot\vec{r_v} = (\vec{r_u}\cdot\vec{r_v})_u - \vec{r_u}\cdot\vec{r_{vu}}$$
$$= \underbrace{\cdots}$$
$$\vec{r_u}\cdot\vec{r_{uv}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{r_u}\cdot\vec{r_v})_u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{-1}{2}E_v\frac{du}{ds}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{1}{2}G_u\frac{dv}{ds}$$

这里面代

$$\Rightarrow k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{dv}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\theta + \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\sin\theta$$

$$= \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta . \quad \square$$

Cor. 假设曲面第一基本形式 $I = E(u,v)du^2 + G(u,v)dv^2$

（即 (u,v) 正交参数网）则曲面上$\underbrace{\text{测地线方程}}_{k_g=0}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{2\sqrt{G}}\dfrac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta - \dfrac{1}{2\sqrt{E}}\dfrac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta \\ \dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta \\ \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta \end{cases}$$

未知函数 $u = u(s)$

$v = v(s)$

$\theta = \theta(s)$

一般参数下的测地线方程

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}(u(s), v(s))\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0$$