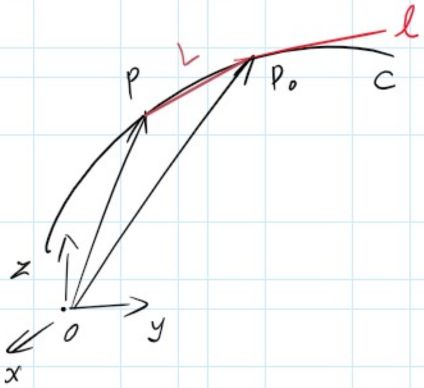
基本三棱形 ✓

2020年9月17日 14:16

基本三棱形 ～ Frenet 标架的动机

1) 曲线在一点处的切线



设 $C: r = r(t)$, $t \in I$ 为曲线

$P_0: r(t_0)$ 为 C 上一点.

<u>考察 P_0 处的切线</u>

在 C 上任取一点 P, P_0P 确定一条直线 L

称为 C (在 P_0 处) 的割线.

让 P 沿曲线 C 趋向于 P_0, 割线 L 绕 P_0 "缓缓转动".

若 L 与某一直线 l "不断靠近", 则称 l 为 C 在 P_0 处的切线.

(相切的口语化定义)

割线 $v = \overrightarrow{P_0P} = (x(t) - x(t_0),\ y(t) - y(t_0),\ z - z(t_0))$

estimate 差商 $\dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$, ..., ...

如果 $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$, $\lim\limits_{t \to t_0}$ (另外2个) 存在, 我们才好谈切线.

深入一些: $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} = r'(t_0)$, 就是 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

这个是切向量, 指定好了方向. 切线的话就要经过 $r(t_0)$.

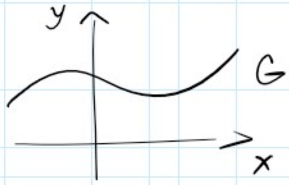
切线方程:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

方向

例. The graph of $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto f(t)$, f 可微.



$G = \{(t, f(t))\}$ is a curve: $r(t) = (t, f(t))$

$r'(t) = (1, f'(t))$

tangent line at $(t_0, f(t_0))$:

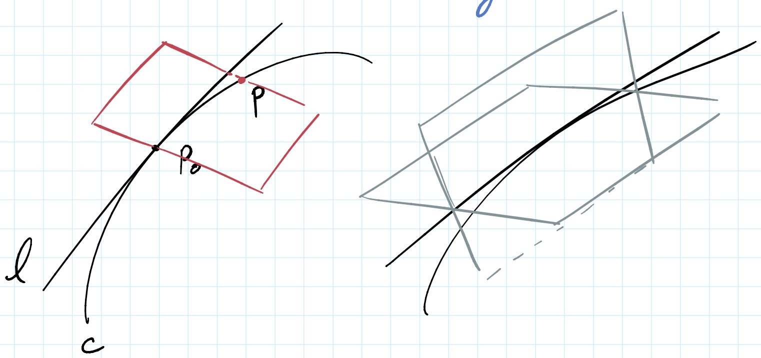
$r(t) = (t, f(t))$

tangent line at $(t_0, f(t_0))$:

$$\frac{x-t_0}{1} = \frac{y-f(t_0)}{f'(t_0)} \Longrightarrow y-f(t_0) = f'(t_0)(x-t_0)$$

★2) 曲线在一点的密切平面 (osculating plane)

kissing



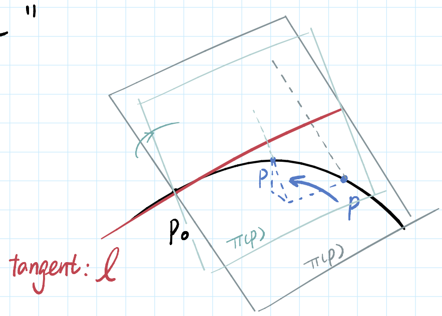
在P_0处找一个plane s.t. 它在P_0处与曲线C "最贴近"

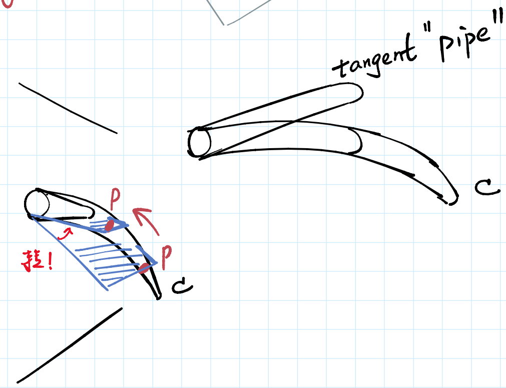
取C上的一点P which is "close to P_0".

P与P_0处切线 l 确定唯一的一平面 $\pi(P)$.

让P沿C趋于P_0，那么$\pi(P)$绕 l "转动".

若$\pi(P)$与某个平面π_0不断接近，则称π_0为C在P_0处的密切平面. 怎样写出来？

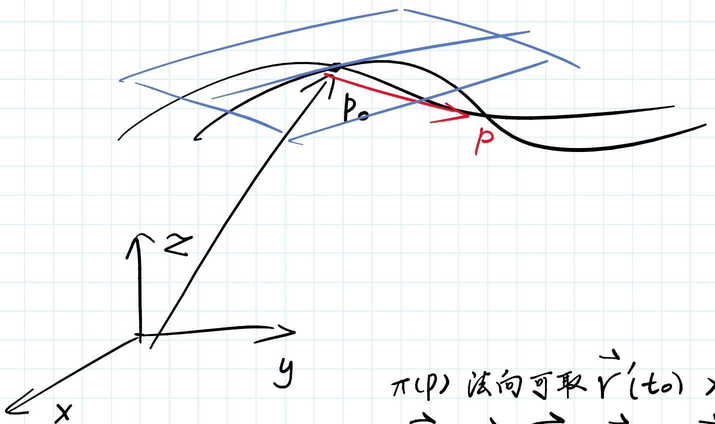


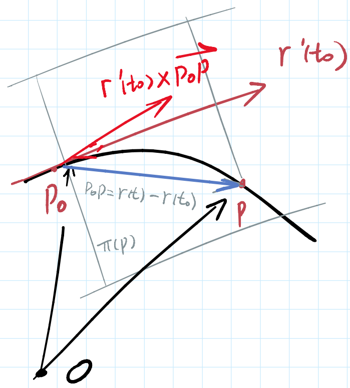


try 点法式.

如何确定π_0法方向？

利用$\pi(P)$法方向趋近





$\pi(p)$ 法向可取 $\vec{r}'(t_0) \times \overrightarrow{P_0P}$

$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$.

$\Rightarrow$ $\pi(p)$ 法方向 $= \vec{r}'(t_0) \times (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0))$

$\Rightarrow \pi(p)$ 法方向 $= \vec{r}'(t_0) \times (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0))$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2!}\vec{r}''(t_0)(t-t_0)^2 + \varepsilon\cdot(t-t_0)^2, \quad \lim_{t\to t_0}\varepsilon = \vec{0}$$

$$\vec{r}'(t_0)\times(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)) = \vec{r}'(t_0)\times\left(\vec{r}'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}\vec{r}''(t_0)(t-t_0)^2 + \varepsilon(t-t_0)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2!}\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)(t-t_0)^2 + \vec{r}'(t_0)\times\varepsilon(t-t_0)^2$$

$r'(t_0)\times(r(t)-r(t_0))$ 平行于 $\frac{1}{2!}(t-t_0)^2\left(r'(t_0)\times r''(t_0) + r'(t_0)\times\varepsilon\right)$

$\Leftrightarrow$ 平行于 $r'(t_0)\times r''(t_0) + r'(t_0)\times\varepsilon$

令 $t\to t_0$ 则 $P\to P_0$ 极限过程在 ε 里.

$\pi(P)$ 法方向 $/\!/ \ r'(t)\times r''(t) + 2\,r(t_0)\times\varepsilon \longrightarrow r'(t_0)\times r''(t_0)$

命题 对于曲线 C: $r=r(t)$, $t\in I$

当 $\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)\neq\vec{0}$ 时 C 在 P_0 处有密切平面, 且

法向为 $\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)$

密切平面方程

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot(\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)) = 0, \quad P \text{ 为 } \pi \text{ 上动点}$$

定义 若 $\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)=\vec{0}$, 称 $\vec{r}(t_0)$ 为曲线上逗留点

fact: 若 $\forall t\in(a,b)$ $r'(t)\times r''(t)=\vec{0}$

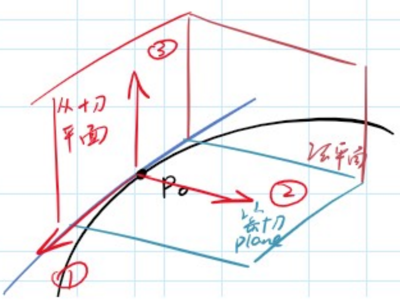
则 $r(t)$ 方向固定

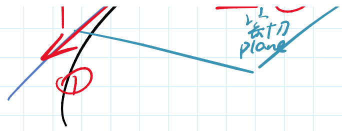
P_0 处密切平面法向量可取为 $r'(t_0)\times r''(t_0)$

法平面 $P_0X\cdot r'(t_0)=0$

从切平面法向量 $(r'\times r'')\times r'$, 方程 $P_0X\cdot[(r'\times r'')\times r']=0$

3) 曲线在一点处的基本三棱形




plane