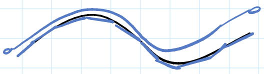
idea: 对于(非直线)曲线 $C: r=r(t),\ t\in I$.
其上每一点处指定一个 Frenet 标架 $\Sigma=\{r(t), T, N, B\}$ 右手系,
表示 C 上每一点基本三棱形



---

设曲线 $C: r=r(t)\quad a\le t\le b$
分割 $[a,b]$
$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$
相应地, C 也被分割为 n 段, 分点为 $r(t_i)=(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$
每个直线段长度 $|P_{i-1}P_i|=\left((x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}}$
折线段长度 $=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(x'(\xi_i)\Delta t_i)^2+(y'(\eta_i)\Delta t_i)^2+(z'(\zeta_i)\Delta t_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

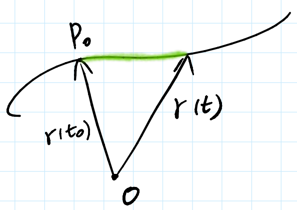
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2+(z'(\zeta_i))^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta t_i$$

令 $\Delta t_i\to 0$ 得弧长 $=\int_a^b\left[(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\right]^{\frac{1}{2}}dt=\int_a^b|r'(t)|\,dt$

**Def** 曲线(段)

弧长 $\int_a^b|\vec{r}'(t)|\,dt$

fix $t_0$, $S(t)=\int_{t_0}^{t}|\vec{r}'(\tau)|\,d\tau$




$P_0$ 到 P 的弧长

能否将 t depends on s ?

$\frac{ds}{dt}(t)=|\vec{r}'(t)|>0 \Rightarrow S(t)\uparrow$ S 与 t 一一对应

$\Rightarrow$ t 可表示为 s 的函数 $t=t(s)$
至少在概念上可用弧长 s 作为曲线 C 的参数 $r=r(s)$

Convention: 对一般参数求导用记号 $r'(t), r''(t), \cdots$
关于弧长求导用记号 $\dot{r}(s), \ddot{r}(s), \dddot{r}(s)\ \cdots$

☆命题 对于 $C: r=r(t), t\in I$
t 是弧长参数 $\Leftrightarrow |r'(t)|\equiv 1$

Pf. $(\Leftarrow)$ 在任意参数 t, 曲线弧长 $s=\int_{t_0}^{t}|r'(u)|\,du$

$t$ 是弧长参数 $\Leftrightarrow |r'(t)| \equiv 1$

Pf. $(\Leftarrow)$ 在任意参数 $t$，曲线弧长 $S = \int_{t_0}^{t} |r'(u)| du$

若 $|r'(u)| \equiv 1$ 则 $S = \int_{t_0}^{t} du = t - t_0$ i.e. $t = S + t_0$

$(\Rightarrow)$ if $t$ 已是弧长参数

then since $S = \int_{t_0}^{t} |r'(u)| du \Longrightarrow t = S = \int_{t_0}^{t} |r'(u)| du$

两边求导 over $t$ : $1 = |r'(t)|$ 即 $|r'(t)| \equiv 1$

$r(t(S)) = (x(t(S)), y(t(S)))$

t is a map: $\mathbb{R}^+ \to [c, d]$

i.e. $r(S) = (x(S), y(S))$ 这里abuse太严重了… 反正明确一件事: $t(S)$ 是"只有"$S$.