2-d case, 相对曲率

平面曲线的Frenet公式，相对曲率

例. 由 $y=f(x)$ $a<x<b$ 的图像给出一条平面曲线

从空间角度看 $C:\ \vec{r}=\vec{r}(x)=(x, f(x), 0)$

$$\vec{r}'(x)=(1, f'(x), 0)$$

$$|\vec{r}'(x)|=\sqrt{1+f'^2(x)}>0$$

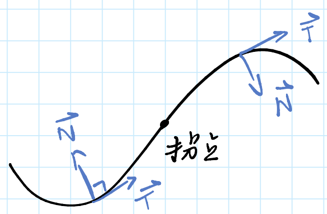
$$\vec{r}''=(0, f''(x), 0)$$

$$\vec{r}'\times\vec{r}''=(0, 0, f''(x))$$

只要 $f''(x)\neq 0$，副法向量存在. 若 $f''(x)>0$ 则 $B=(0,0,1)$

若 $f''(x)<0$ 则 $B=(0,0,-1)$

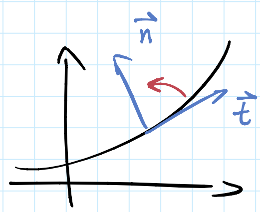
在拐点处 $(x_0, f(x_0))$ 处 $(f''(x_0)=0)$



在拐点处作为空间曲线主法 $\vec{N}$ 不存在，但曲线在该点性态仍是很好的. 为此我们改进技术，选取适合平面曲线特点的标架，仍称 Frenet 标架.

对于平面曲线 C 在 C 所在平面取定一个直角坐标系 $\Sigma=\{O, x, y\}$

写出C的方程



$$C:\ \vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t), y(t)),\quad t\in I$$

则C上每点处单位切向量 $\vec{t}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=\dfrac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}(x', y')$

将 $\vec{t}$ 依逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，得到的 unit normal vector $\vec{n}$，

称 $\Sigma=\{\vec{r}(t), \vec{t}, \vec{n}\}$ 为 C 的 Frenet 标架.

称 $\Sigma=\{\vec{r}(t),\vec{t},\vec{n}\}$ 为 C 的 Frenet 标架.

注. 弧长

$$s=\int_{t_0}^{t}|\vec{r}'(t)|\,dt=\int_{t_0}^{t}(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

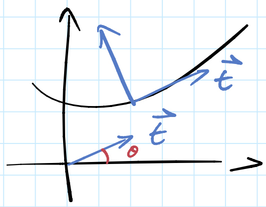
且 t 为弧长参数 $\Longleftrightarrow |\vec{r}'(t)|\equiv 1$

对于正则曲线 $\frac{ds}{dt}=|r'(t)|>0$, 即 s 与 t 互为反函数, 理论上可用弧长作为参数.

$C:\vec{r}=\vec{r}(s)=(x(s),\ y(s))$

约定 $\frac{d\vec{r}}{ds}:=\dot{\vec{r}}=(\dot{x}(s),\dot{y}(s))$ (记号而已)

Frenet 公式



对于 2-d curve $C:\ \vec{r}=\vec{r}(s)=(x(s),y(s))$

$\vec{t}=\dot{\vec{r}}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s))$, 由于 $|\vec{t}|\equiv 1$, 有函数 $\theta=\theta(s)$ s.t.

$\vec{t}=(\cos\theta(s),\ \sin\theta(s))$.

此时 $\vec{n}=\left(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\right)=(-\sin\theta,\ \cos\theta)$. 称 $\vec{n}$ 为 C 的单位法向量

$=(-\dot{y},\ \dot{x})$

称 $\Sigma=\{\vec{r}(s);\ \vec{t},\ \vec{n}\}$ 为 C 上的 Frenet 标架

对 $\{\vec{r}(t);\ \vec{t}(s),\ \vec{n}(s)\}$ 关于 s 求导

$\dot{\vec{t}}(s)=\lambda\vec{t}+\mu\vec{n}$, $\qquad \dot{\vec{n}}(s)=\lambda'\vec{t}+\mu'\vec{n}$

$\vec{t}\cdot\vec{t}\equiv 1$ $\qquad \vec{n}\cdot\vec{n}\equiv 1$

$\dot{\vec{t}}\cdot\vec{t}\equiv 0$ $\qquad \dot{\vec{n}}\cdot\vec{n}\equiv 0$

$\Downarrow\ \dot{\vec{t}}\perp\vec{t}$  $\qquad$ 且 $\vec{t}\cdot\vec{n}\equiv 0$ 有 $\dot{\vec{t}}\cdot\vec{n}+\vec{t}\cdot\dot{\vec{n}}\equiv 0$

$\dot{\vec{t}}=k_r\vec{n}$ $\qquad\qquad \Downarrow$

$k_r\vec{n}\cdot\vec{n}+\vec{t}(\lambda'\vec{t}+\mu'\vec{n})=0$

$\Downarrow$

$\dot{\vec{t}} = k_r \vec{n}$

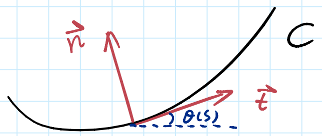
$$k_r \vec{n}\cdot\vec{n} + \vec{t}(\lambda'\vec{t} + \mu'\vec{n}) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda' = -k_r$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\vec{n}} = -k_r \vec{t}$$

称 $\begin{cases}\dot{\vec{t}} = k_r \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -k_r \vec{t}\end{cases}$ 为C的Frenet公式，k_r 称为C的相对曲率

问: why relative?

① since $|\vec{t}(s)| \equiv 1$, $|\dot{\vec{t}}(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$, $\Delta\theta$ 为 $\vec{t}(s+\Delta s)$ 与 $\vec{t}(s)$ 之 unit tan vec 的夹角

② 实际上，k_r 有更加清晰的意义



θ depends on S

$\vec{t} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\vec{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$$\dot{\vec{t}} = \left((-\sin\theta)\frac{d\theta}{ds}, (\cos\theta)\frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{d\theta}{ds}(-\sin\theta, \cos\theta) = \frac{d\theta}{ds}\vec{n}$$

与 $\dot{\vec{t}} = k_r \vec{n}$ 比较，有 $k_r = \frac{d\theta}{ds}$，$\theta(s)$ 是 $\vec{t}(s)$ 与 x 轴构成的角.

<u>k_r 的计算公式</u>

$$\vec{t} = (\cos\theta, \sin\theta) = (\dot{x}, \dot{y})$$
$$\vec{n} = (-\dot{y}, \dot{x})$$
$$\dot{\vec{t}} = k_r \vec{n} \Rightarrow (\ddot{x}, \ddot{y}) = k_r(-\dot{y}, \dot{x})$$
$$\begin{cases}\ddot{x} = -k_r \dot{y} \\ \ddot{y} = k_r \dot{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}\dot{y} = -k_r \dot{y}^2 \\ \dot{x}\ddot{y} = k_r \dot{x}^2\end{cases}$$

$|\dot{r}(s)|^2 = 1$

since $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \equiv 1$, $k_r = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$

与 $k_r = \frac{d\theta}{ds}$ 对照，可知 if 曲线 C: $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(s), y(s))$

是2阶光滑的 ($x(s)$, $y(s)$ 有连续2阶导数)

可以定义出连续的函数 $\theta(s)$

$$\theta(s) = \theta(0) + \int_0^s k_r(t)\,dt$$

方程 $\frac{d\theta}{ds}=k_r$ 称为平面曲线的自然方程

一旦 $\theta(s)$ 求出来，那么由于 $\dot{x}=\cos\theta$，$\dot{y}=\sin\theta$ 也就已知，积分得到 $\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \end{cases}$