Frenet frame

2020年9月22日 13:44

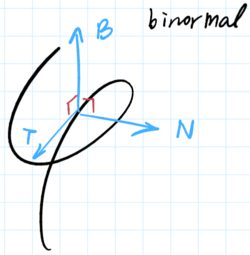
3-d case

Frenet - Serret

设曲线为C: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

令 $T = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$，C的单位切向量

令 $B = \dfrac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}$，C的副法向量



↑ 密切平面的法向量．整体 $\vec{r}'\times\vec{r}''$

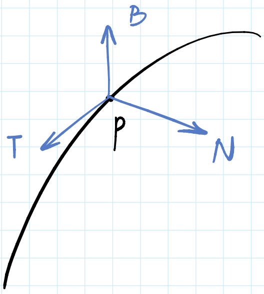
$N = B\times T$：C的主法向量

我们称 $\{r(t), T, N, B\}$ 为曲线C上 $r(t)$ 处的 Frenet 标架

一般情形 $T = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$

$$B = \frac{r'\times r''}{|r'\times r''|}$$

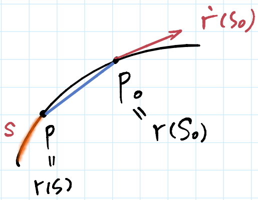
$$N = B\times T$$



弧长参数下的Frenet标架

对正则曲线C，总可取弧长作为参数：$r=r(s)$. 在此情况之下，C上每点的Frenet标架怎样求？

(i) 切向量 tangent vector

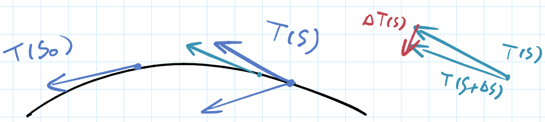


$\lim\limits_{s\to s_0} \dfrac{r(s)-r(s_0)}{s-s_0}$ 存在 $:= \dot{r}(s_0)$

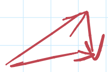
$|\dot{r}(s)|=1 \ \forall s$，故 $\dot{r}(s)$ 本身已是 unit vector

记 $T(s) = \dot{r}(s)$.

(ii) 主法向量



由图 $\Delta T(s) \perp T(s)$，故 $\dfrac{T(s+\Delta s)-T(s)}{\Delta s}\cdot T(s) = 0$



remark: 逆元唯一 ⇒ $\dot{r}(s)\times\dot{r}(s)$ 唯一.

由图 $\Delta T(s) \perp T(s)$，故 $\dfrac{T(s+\Delta s)-T(s)}{\Delta s}\cdot T(s)=0$ remark: 选元唯一 $\Rightarrow \dot{r}(s)\times\ddot{r}(s)$ 唯一.

令 $\Delta s\to 0$ 得 $\dot{T}(s)=\ddot{r}(s)$

$$\ddot{r}(s)\cdot\dot{r}(s)=0 \quad \forall s.$$

事实 $\ddot{r}(s)$ 与主法向量方向一致 ？ 是定义 $N(s)=\dot{r}(s)\times\ddot{r}(s)$ 吗？

从而 $\ddot{r}(s)=k\,N(s)$，$k\geq 0$

故 $N=\dfrac{\ddot{r}(s)}{|\ddot{r}(s)|}$，$B=T\times N$