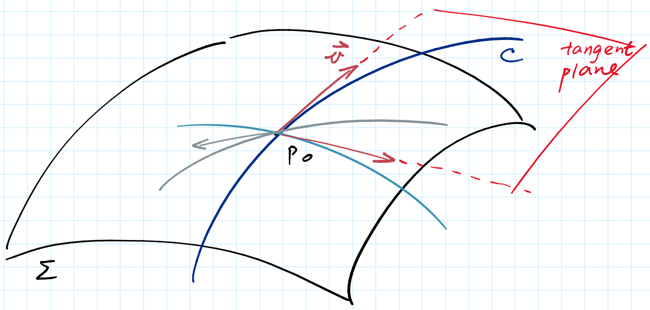
# 曲面的切平面

2020年10月13日 14:53

给定正则曲面 $\Sigma: \vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

$(u_0,v_0)$ 对应于 $P_0\in\Sigma$.

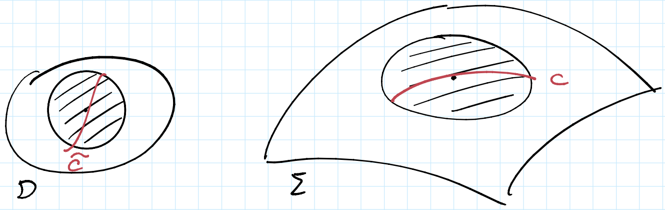



在 $\Sigma$ 任取一条经过 $P_0$ 的曲线 $C$: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $t=0$ 对应 $P_0$

$C$ 在 $P_0$ 处切向量 $\vec{v}=(x'(0),\ y'(0),\ z'(0))$

曲面上所有经过 $P_0$ 的曲线，它的切向量 at $P_0$ 构成一个集合.

这些切向量全部位于经过 $P_0$ 的一个平面 $\pi$ 上，称为 $\Sigma$ 的切平面 at $P_0$.




对正则曲面 $\Sigma$ 与 $D$ 在小范围是一一对应.

$\tilde{C}$: $\begin{cases} u=\varphi(t) := u(t) \\ v=\psi(t) := v(t) \end{cases}$

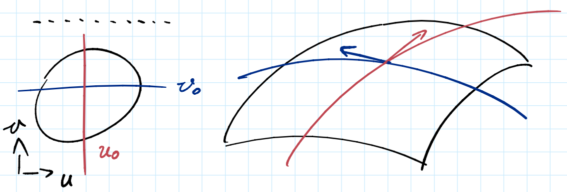
$\Sigma$: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

从参数平面看, $\tilde{C}$: $\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases}$

$$\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))=(x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t)))$$

记 $u(0)=u_0$
$v(0)=v_0$

$$C \text{ 在 } P_0 \text{ 处 } \vec{v}=\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0}=\vec{r}_u(u_0,v_0)\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}+\vec{r}_v(u_0,v_0)\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}$$



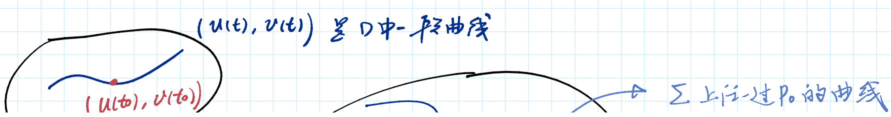

$u$ 曲线 $v=v_0$ 的切向量:

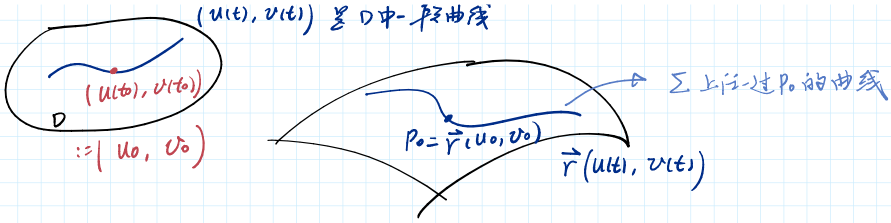
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v_0),\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v_0),\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v_0)\right)$$

$v$ 曲线 $u=u_0$ 的切向量:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u_0,v)=\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v),\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v),\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v)\right)$$

讨论 $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ 和 $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$:






$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{\partial \vec r}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial \vec r}{\partial v}v'(t)$$

$$\frac{d\vec r}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial \vec r}{\partial u}(u_0,v_0)\,u'(t_0) + \frac{\partial \vec r}{\partial v}(u_0,v_0)\,v'(t_0)$$

Σ上过$P_0$的任何一条曲线在$P_0$处的切向量都是线性组合 of $\frac{\partial \vec r}{\partial u}(u_0,v_0)$ 和 $\frac{\partial \vec r}{\partial v}(u_0,v_0)$.

张成切平面$\pi$.

曲面Σ在$P_0$处的切平面.

法向量可取 $\vec r_u \times \vec r_v\Big|_{(u_0,v_0)}$