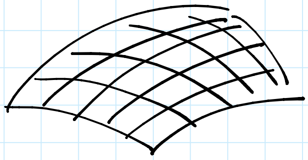
曲面的参数方程

2020年10月13日 14:03

曲面论初步（局部理论）

一. Concepts

1) 什么是曲面？



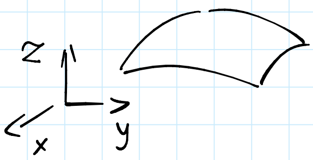
本课程研究空间中一般的曲面（几何性质）

由于我们利用 calculus, Linear Algebra 作为工具，

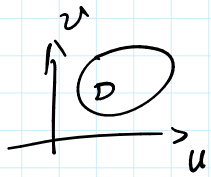
所以要从一个合适的角度看待、描写曲面.

参数方程

曲面定义如下



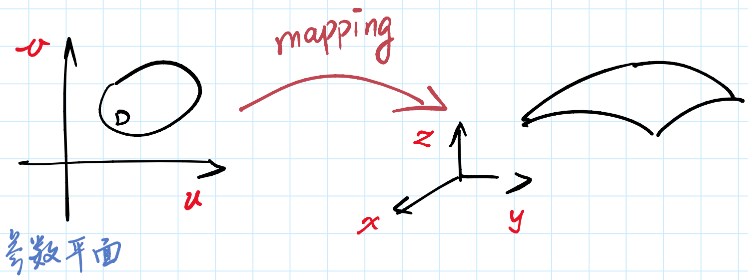
$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D$$



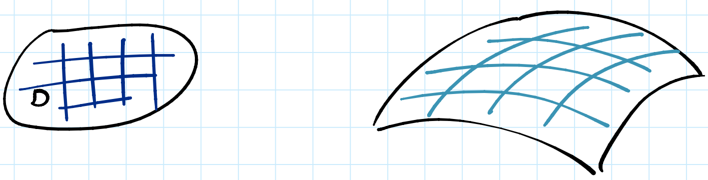
2) 从平面区域 D 到 E^3 的一个向量值函数

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

得到 E^3 中的点集，称为 E^3 中的一个曲面



注：这种观点有效！原因：我们过去熟悉的那些曲面都可以用这种方式表达



例. $\vec{r}(u,v) = (3u,\ 4u,\ 5)$

$$\begin{pmatrix} 3 \le u \le 4 \\ 7 \le v \le 9 \end{pmatrix}$$

不是真正意义上的曲面.

$\vec{r}_u = (3,4,0)$

$\vec{r}_v = (0,0,0)$

2、<u>正则曲面</u> regular surface

$\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \qquad (u,v) \in D$

求偏导向量，如果在 (u_0,v_0) 处有

$$\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0) \neq \vec{0}$$

则称 $\vec{r}(u_0,v_0)$ 为曲面上正则点. Σ 为正则曲面 if $r(u,v)$ regular $\forall (u,v)$.

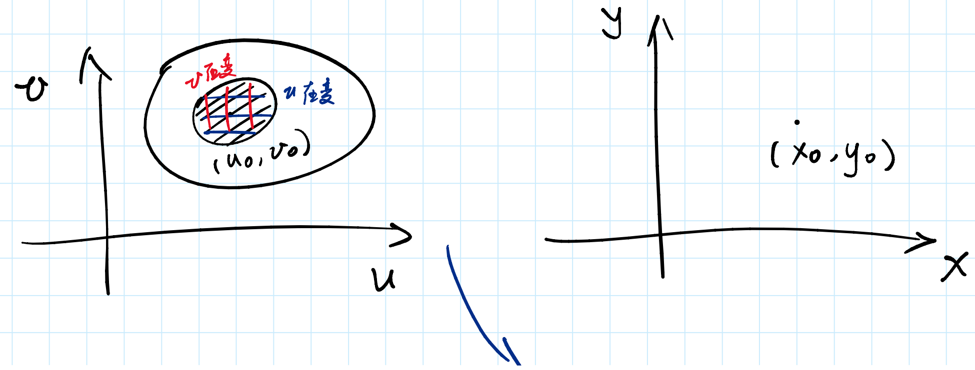
$\vec{r}_u(x,y,z) = (x_u, y_u, z_u)$

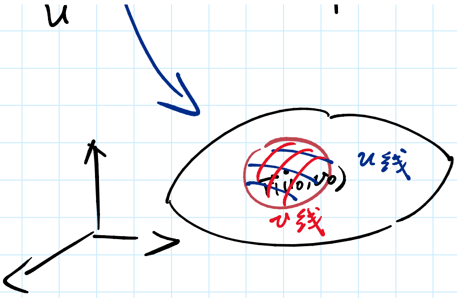
$\vec{r}_v(x,y,z) = (x_v, y_v, z_v)$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \iff$ 3个坐标不全为0，不妨设 $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$

由 continuity，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 (u_0,v_0) 附近处处 nonzero，



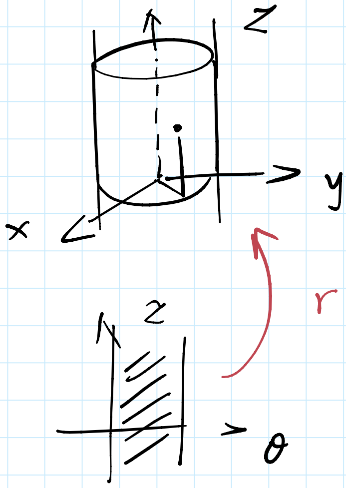


从而 (u,v) 与 (x,y) one-to-one Correspondance，从而

在 $\vec{r}(u_0,v_0)$ 附近，曲面片上点与 (u,v) 一一对应（非退化）

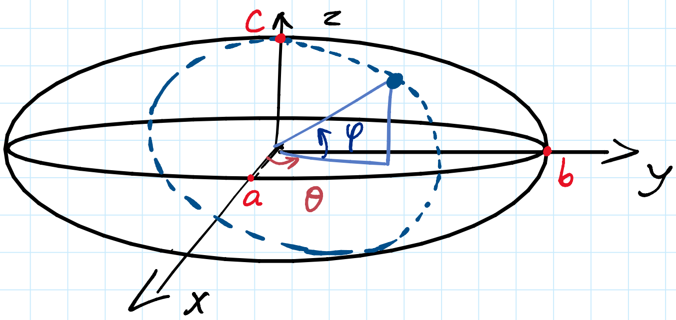
邻域上一一对应

例2. 圆柱面

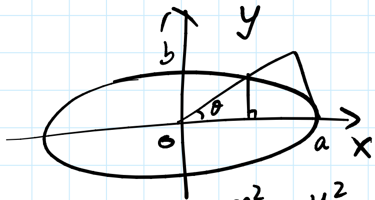


$$\vec{r}=\vec{r}(\theta,z)$$
$$=(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ z)$$

☆例. 椭球面参数化



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$