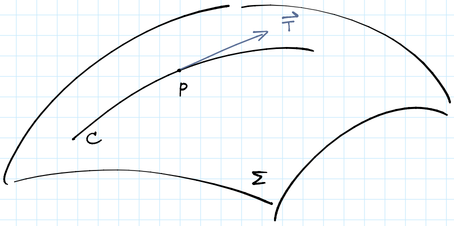
法曲率

2020年10月26日 16:10



曲线 C: $\begin{cases} u = u(s) \\ v = v(s) \end{cases}$ 在 Σ 上: $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$

$= \vec{r}(s)$

$\vec{r}$ depends only on S !

C 在 P 处 $\vec{T} = \dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u(u_0, v_0) \left.\dfrac{du}{ds}\right|_{s=0} + \vec{r}_v(u_0, v_0) \left.\dfrac{dv}{ds}\right|_{s=0}$

$\Downarrow \ |\vec{T}| = 1$

$$\left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}\right) \cdot \left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}\right) = 1$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

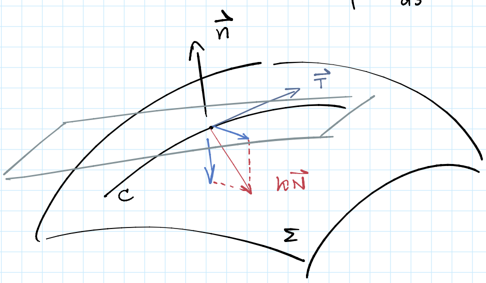
$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u (du)^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \, du dv + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v (dv)^2 = (ds)^2$$

即 $E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 = (ds)^2$

Frenet 公式, $\dot{T}(s) = \kappa \vec{N} = \dfrac{d}{ds}\left(\vec{r}_u \dfrac{du}{ds} + \vec{r}_v \dfrac{dv}{ds}\right)$

$$= \left(\frac{d}{ds}\vec{r}_u\right)\frac{du}{ds} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\frac{d}{ds}\vec{r}_v\right)\frac{dv}{ds} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

$$= \left(\vec{r}_{uu}\frac{du}{ds} + \vec{r}_{uv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\vec{r}_{vu}\frac{du}{ds} + \vec{r}_{vv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}$$



画画几何

by the way, $\kappa\vec{N}$ 叫曲率向量.

$\kappa\vec{N}$ 分成 切部分 + 法部分

设法部分 $= \lambda\vec{n}$

$\Rightarrow \lambda = \kappa\vec{N} \cdot \vec{n}$

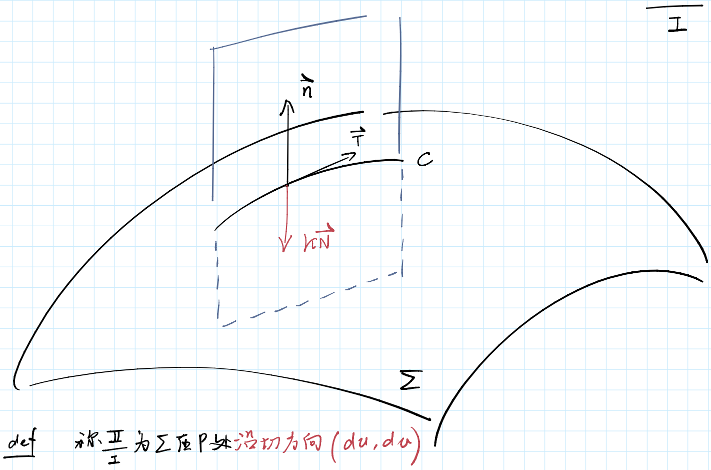
$= \dot{T}(s) \cdot \vec{n}$

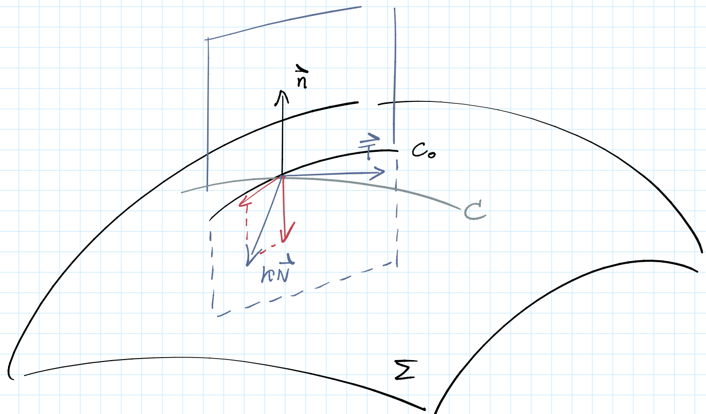
$= \cdots$

$= L\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2M \dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + N\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2$

$= \dfrac{L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2}{(ds)^2}$

$= \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$





def 称 $\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ 为 Σ 在 P 处沿切方向 (du, dv)

的法曲率

法曲率几何意义

截平面由法向量和给定的切方向确定